Exercice 1 (3 points) :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(0 , 0 , 1) ; B(1 , 1 , 1) ; C(2 , 1 , 2) et la sphère (S) de centre Ω(1 , -1 , 0) et de rayon est $R=\sqrt{3}$

1 — 1) Montrer que : $x^2+y^2+z^2-2x+2y-1=0$ est une équation de la sphère (S) et vérifier que A appartient à la sphère (S)

0,75 — 2) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$ et en déduire que : $x-y-z+1=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

0,5 — b) Calculer d(Ω , (ABC)) et en déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A

3) Soit (Δ) la droite passant par le point Ω et orthogonale au plan (ABC)

0,5 — a) Montrer que : $\begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=-t \end{cases}$; $t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

0,25 — b) Déterminer les triplets de coordonnées des points d'intersection de la droite (Δ) avec (S)

Exercice 2 (3 points) :

1 — 1) Résoudre dans ℂ l'équation : $(E)=z^2-8z+25=0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ les points A , B et C d'affixes respectives $a=4+3i$; $b=4-3i$ et $c=10+3i$

0,75 — a) Montrer que l'affixe du point D, image de A par la translation T de vecteur $\overrightarrow{BC}$, est $d=10+9i$

0,5 — b) Vérifier que : $\frac{b-a}{d-a}=-\frac{1}{2}(1+i)$ et écrire le nombre $-\frac{1}{2}(1+i)$ sous forme trigonométrique

0,75 — c) En déduire $\overline{(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})}\equiv\frac{5\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 3 (3 points) :

On considère la suite numérique (u_n) définie par : $u_0=2$ et $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{5}u_n+\frac{4}{5}$

0,5 — 1) Vérifier que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-1=\frac{1}{5}(u_n-1)$

0,5 — 2) a) Montrer par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>1$

0,75 — b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante, puis en déduire qu'elle est convergente

3) On considère la suite (v_n) définie par : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n=u_n-1$

0,5 — a) Montrer que a suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{5}$, puis écrire v_n en fonction de n

0,75 — b) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1$

Exercice 4 (3 points) :

Un sac contient 9 jetons : 3 d'entre eux sont noirs, 4 jetons sont blancs, 2 jetons verts
On tire au hasard et simultanément 3 jetons du sac

1 — 1) Calculer p(A) et p(B) , où A et B désignent les événements :
A : « Tirer trois jetons de même couleur »
B : « Tirer trois jetons de couleurs deux à deux différentes »

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de jetons noirs tirés

0,5 — a) Déterminer les valeurs prises par X

1 — b) Calculer $p(X=1)$ et $p(X=2)$

0,5 — c) Déterminer la loi de probabilité de X

Exercice 5 (8 points) :

I. On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=x^2-x-\ln(x)$

0,5 — 1) a) Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}$, $2x^2-x-1=(2x+1)(x-1)$

1 — b) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $g'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$ et en déduire que g est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$

0,5 — 2) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $g(x)\geq 0$ (remarquer que $g(1)=0$)

II. On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=x^2-1-(\ln(x))^2$

Et on désigne par (C_f) la courbe f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm

0,5 — 1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat

0,5 — b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

(remarque que $f(x)=x^2\left(1-\frac{1}{x^2}-\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)$)

0,25 — c) en déduire que (C_f) admet une branche parabolique en $+\infty$ dont on précisera la direction

1 — 2) a) Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=2\frac{x^2-\ln(x)}{x}$

0,75 — b) Vérifier que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $\frac{g(x)}{x}+1=\frac{x^2-\ln(x)}{x}$ et en déduire que f est croissante sur $]0,+\infty[$

0,5 — 3) a) Montrer que : $y=2x-2$ est une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) ai point A(1 , 0)

1 — b) Tracer dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ la courbe (C_f) et la droite (T) (on admet que (C_f) admet un point d'inflexion unique qui est le point A)

on considère les intégrales suivantes : $I=\int_1^e(1+\ln(x))dx$ et $J=\int_1^e(1+\ln(x))^2\,dx$

0,75 — 4) a) Montrer que : $H: x\mapsto x(\ln(x)-1)$ est un primitive de $h: x\mapsto \ln(x)$ sur $]0,+\infty[$, et en déduire que : $\int_1^e \ln(x)\,dx=1$

0,5 — b) En intégrant par parties, montrer que : $\int_1^e(\ln(x))^2\,dx=e-1$

0,5 — c) Montrer que l'aire du plan limité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$ est $\frac{1}{3}(e^3-6e+8)cm^2$